**[Олимпиадные задачи по математике по теме "Принцип Дирихле"](http://www.seznaika.ru/matematika/oimpiada/2431--q-q" \t "_blank)**

Задача 1:

В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение:

Перед нами миллион «кроликов»-елок и, увы, всего лишь 600001 клетка с номерами от 0 до 600000. Каждый «кролик»-елка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кролика» – если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроликов»-елок было бы не более 600001 штук. Но ведь, если два «кролика»-елки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

Задача 2:

Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Решение:

Остатки по модулю 11 – «клетки», числа – «кролики».

Задача 3:

В городе Ленинграде живет более 5 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

Решение:

Постройте миллион клеток с номерами от 0 до 999999 и рассадите там людей, поместив каждого ленинградца в клетку, номер которой равен количеству волос на его голове.

Задача 4:

В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Решение:

25 ящиков-«кроликов» рассадим по 3 клеткам-сортам. Так как 25 = 3 • 8 + 1, то применим «обобщенный принцип Дирихле» для N = 3, k = 8 и получим, что в какой-то клетке-сорте не менее 9 ящиков.

Задача 5:

В стране Курляндии m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на ответственный матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Еще один футболист прилетел к месту предстоящего матча на вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.

Решение:

Так как перевезено всего 10m + 1 футболистов, то, рассадив их по клеткам-командам, получаем, что в какой-то клетке сидит 11 футболистов.

Задача 6:

Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Решение:

Различных разностей может быть 14 – от 1 до 14 – это те 14 клеток, в которые мы будем сажать кроликов. Кто же будет нашими кроликами? Ими, конечно, должны быть разности между парами данных нам натуральных чисел. Однако имеется 28 пар и их можно рассадить по 14 клеткам так, что в каждой клетке будет сидеть ровно два «кролика» (и значит, в каждой меньше трех). Здесь надо использовать дополнительное соображение: в клетке с номером 14 может сидеть не более одного кролика, ведь число 14 можно записать как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: 14 = 15 – 1. Значит, в оставшихся 13 клетках сидят не менее 27 кроликов, и применение обобщенного принципа Дирихле дает нам желаемый результат.

 Задача 7:

Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Решение:

Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Осталось заметить, что если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых.

 Задача 8:

Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Решение:

Пусть всего команд n. Тогда вариантов числа команд, с которыми сыграла данная команда n: от 0 до n – 1. Осталось заметить, что если одна команда сыграла со всеми n – 1-й, то никакая другая команда не могла ни с кем не сыграть.

 Задача 9:

а) Какое наибольшее число полей на доске 8 ? 8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке вида из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

б) Какое наименьшее число полей на доске 8 ? 8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке вида было по крайней мере одно черное поле?

Решение:

а) Разбейте доску на 16 квадратиков 2 ? 2 – это клетки; кроликами, конечно, будут черные поля.

 Задача 10:

10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

Решение:

Из условий следует, что найдутся 7 школьников, решивших 35 – 6 = 29 задач. Так как 29 = 4 • 7 + 1, то найдется школьник, решивший не менее пяти задач.

 Задача 11:

Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Решение:

Ответ: 16 королей. Разобьём доску на 16 квадратиков, в каждом может быть не более одного короля.

 Задача 12:

Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Решение:

Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины большого треугольника.

 Задача 13:

В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

Решение:

Разобьем наш квадрат на 25 квадратов со стороной 20 см. По обобщенному принципу Дирихле, в какой-то из них попадет по крайней мере три точки из 51 брошенной.

 Задача 14:

Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

Решение:

Если бы каждый из рабочих мог купить магнитофон, то у них в сумме было бы не менее 5 • 320 = 1600 рублей.

 Задача 15:

В бригаде 7 человек и их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

Решение:

Покрасим всю сушу в синий цвет, а все точки, диаметрально противоположные суше – в красный. Тогда обязательно есть точка, которая покрашена в оба цвета. В ней и надо рыть туннель.

 Задача 16:

Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1987.

Решение:

Рассмотрите 1988 степеней и их остатки по модулю 1987.

 Задача 17:

Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

Решение:

Квадраты при делении на 100 могут давать лишь 51 остаток, так как остатки x и 100 – x при возведении в квадрат дают один и тот же остаток.

 Задача 18:

Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1987.

Решение:

Рассмотрим 1988 чисел-«кроликов» 1, 11, 111, …, 111 … 11 (1988 единиц) и посадим их в 1987 клеток с номерами 0, 1, 2, …, 1986 – каждое число попадает в клетку с номером, равным остатку от деления этого числа на 1987. Тогда (по принципу Дирихле) найдутся два числа, которые имеют одинаковые остатки при делении на 1987. Пусть это числа 11 … 11 (m единиц) и 11 … 11 (n единиц), причем m > n. Но их разность, которая делится на 1987, равна 11 … 1100 … 00 (m – n единиц и n нулей). Сократим все нули – ведь они не имеют никакого отношения к делимости на 1987 – и получим число из одних единиц, которое делится на 1987.

 Задача 19:

Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

Решение: Если 3m и 3n – степени тройки, дающие один и тот же остаток при делении на 1000, то 3m – 3n = 3n(3m – n – 1) делится на 1000 (мы считаем для определенности, что m > n).

Задача 20:

В клетках таблицы 3 ? 3 расставлены числа  – 1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из 8 сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

Решение:

Эти суммы могут принимать лишь 7 разных значений: от  – 3 до 3.

 Задача 21:

Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них – мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

Решение:

Разобьем всех людей на 50 пар так, что в каждой паре – два человека, сидящих друг напротив друга. Ясно, что в одной из этих пар-«клеток» оба человека – мужчины.

 Задача 22:

15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

Решение:

Если это не так, то, очевидно, что мальчики собрали не менее, чем 0 + 1 + 2 +  …  + 14 = 105 орехов – противоречие.

 Задача 23:

Цифры 1, 2, …, 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

Решение:

Произведение чисел во всех группах равно 9! = 362880, а 71? = 357911.

 Задача 24:

В таблице 10 ? 10 расставлены целые числа, причем любые два числа в соседних клетках отличаются не более, чем на 5. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

Решение:

Поскольку от любой клетки до любой другой можно добраться, не более 19 раз сдвинувшись в соседнюю клетку, то все числа находятся между числами a и a + 95, где a – минимальное из всех расставленных чисел. Значит, среди этих чисел не более 96 различных.

 Задача 25:

Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение:

У данного человека среди остальных пяти есть либо не менее трех знакомых, либо не менее трех незнакомых ему. Разберем, например, первый случай. Среди этих трех людей есть либо двое знакомых – тогда они вместе с выбранным нами исходно человеком образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы.

 Задача 26:

На клетчатой плоскости дано 5 произвольных узлов сетки. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих какие-то две из этих точек, также является узлом сетки.

Решение:

Рассмотрите координаты этих точек и их остатки при делении на 2.

Задача 27:

На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Решение:

В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайней мере дважды, например, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог в этих размерах суммарно не меньше 100 (почему?), то мы имеем не менее 100 годных пар обуви в этих размерах.

 Задача 28:

В алфавите языка племени Ни-Бум-Бум 22 согласных и 11 гласных, причем словом в этом языке называется произвольное буквосочетание, в котором нет двух согласных подряд и ни одна буква не использована дважды. Алфавит разбили на 6 непустых групп. Докажите, что из всех букв одной из групп можно составить слово.

Решение:

Докажите, что в одной из групп разность между числом согласных и числом гласных не больше 1.

 Задача 29:

Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдется несколько, сумма которых делится на 10.

Решение:

Рассмотрите 10 сумм: x1, x1 + x2, …, x1+ x2 +  …  + x10 и их остатки при делении на 10.

 Задача 30:

Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Решение:

Разбейте числа от 1 до 20 на 10 наборов, в каждом из которых в любой паре чисел одно делится на другое: 11, 13, 15, 17, 19, 1,2,4,8,16, 3,6,12, 5,10,20, 7,14, 9,18.