Рекомендации по организации комплексного повторения темы «Тригонометрия»

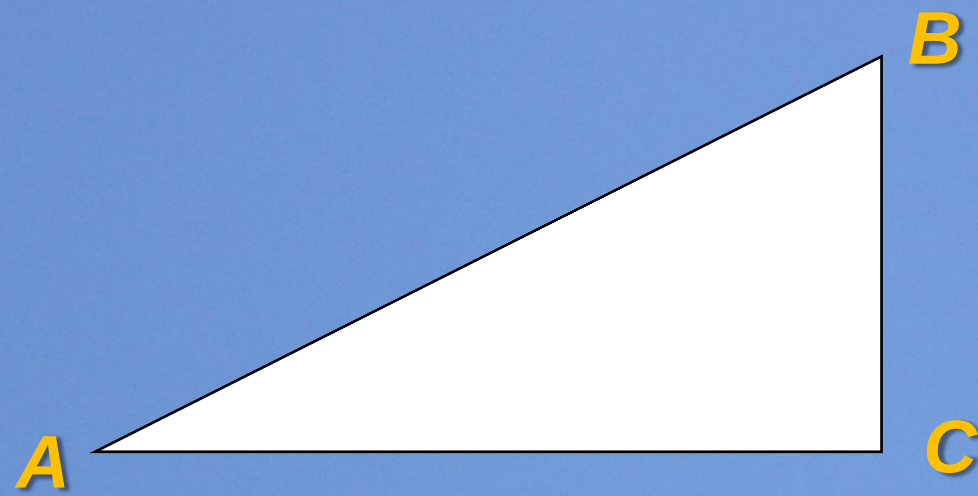
Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$tgA = \frac{BC}{AC}$$

$$ctgA = \frac{AC}{BC}$$



Тригонометрические тождества

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Следствия из тригонометрических тождеств

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

Таблица значений тригонометрических функций основных аргументов

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Правило приведения

Функция в правой части равенства берётся с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол α является углом I четверти;

для углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, $3\pi \pm \alpha$, … название исходной функции сохраняется;

для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{5\pi}{2} \pm \alpha$, … название исходной функции изменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Формулы суммы и разности аргументов (формулы сложения)

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$tg\, 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$$

$$tg\, 3x = \frac{3tgx - tg^3 x}{1 - 3tg^2 x}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, то

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}; \qquad \sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$$

$$tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x - y\right) + \cos\left(x + y\right)\right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x - y\right) - \cos\left(x + y\right)\right)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin\left(x - y\right) + \sin\left(x + y\right)\right)$$

Обратные тригонометрические функции

Арксинус.

Арксинусом числа a называется такое число x из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

$$\arcsin a = x,\quad x=\sin a,\qquad a\in[-1;1],\qquad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},\text{ так как }\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ и }\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6},\text{ так как }\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\text{ и }-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

Функции $y=\sin x \quad Д(y)=\left[-,\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и

$y=\arcsin x \quad Д(y)=[-1;1]$

являются взаимообратными.

Обратные тригонометрические функции

Арккосинус.

<u>Арккосинусом</u> числа a называется такое число x из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен a.

$$\arccos a = x, \quad \cos x = a, \quad a \in [-1;1], \quad x \in [0;\pi]$$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0;\pi]$

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, так как $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3} \in [0;\pi]$

Функции $y = \cos x$ $Д(y) = [0;\pi]$, и

$y = \arccos x$ $Д(y) = [-1;1]$

являются взаимообратными.

Обратные тригонометрические функции

Арктангенс.

<u>Арктангенсом</u> **числа** a **называется такое число** x **из отрезка** $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$**, тангенс которого равен** a**.**

$$arctg\,a = x\ ,\quad tg\,x = a\ ,\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ **, так как** $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ **и** $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$**, так как** $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ **и**

$-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Обратные тригонометрические функции

Арккотангенс.

Арккотангенсом числа a называется такое число x из отрезка $\left[0;\pi\right]$, котангенс которого равен a.

$$arcctga = x,\quad ctgx = a,\quad x \in \left[0;\pi\right]$$

$$arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$, так как $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[0;\pi\right]$

$$arcctg\left(-1\right) = \frac{3\pi}{4}$$, так как $ctg\frac{3\pi}{4} = -1$ и $\frac{3\pi}{4} \in \left[0;\pi\right]$

Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a, \quad a \in [-1;1], \quad (|a| \le 1)$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$$

ные случаи:

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z$$

$$\sin x = -1, \; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in Z$$

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\cos x = a, \quad a \in [-1;1], \quad (|a| \le 1)$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

ные случаи:

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

a	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arccos a$	1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Решение простейших тригонометрических уравнений

$tgx = a$, a – любое число,

$x = arctga + \pi n,\quad n \in Z$

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$arctga$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$ctgx = a$, a – любое число,

$x = arcctga + \pi n,\quad n \in Z$

a	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$arcctga$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Следует помнить, что

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a;$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a;$$

$$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\,a;$$

$$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\,a.$$


Благодарю за внимание